Dimensionamiento Academia.

10/2/17

Introducción

Estructura: conjunto de elementos resistentes

- Rigidez: la estructura no debe romperse
- Resistencia: tiene que aguantar los esfuerzos a los que está sometido.
- Estabilidad: No tiene que caer

Sometido a Acciones (cargas externas)

- Estáticas: Cargas fijas (su propio peso)
- Cargas dinámicas: cargas en movimiento. → Estáticas ($\vec{F} = m \cdot \vec{a}$)
- Cargas ambientales: (variaciones de temperatura.) dependen del entorno.

- Esfuerzos (Internos)

Axil → en la dirección de análisis (barras)

TRACCIÓN ó COMPRESIÓN

← □ →   → □ ←

Cortante → es perpendicular a la dirección de análisis.

↓□↑   ↑□↓

Flector → momento (giro)

- Según sus dimensiones

A) Discretos: Una dimensión dominante y los estudiamos como si solo tuviera esa dimensión. Eje: forjados unidireccionales

B) Continuos: tenemos en cuenta todas sus dimensiones

• Según su forma de trabajo

A) Tensiones UNIFORMES: iguales en cualquier punto

B) Tensiones variables: la tensión según la posición

DISCRETAS

1) Cables: estructuras discretas con tensiones variables
- Solo esfuerzos axiles de tracción

Catenaria (caída natural)

2) Arcos: similares a los cables pero invertidos
- Solo esfuerzos Axiles de Compresión

3) Barras: elementos lineales que solo soportan axiles. Tanto de Tracción como de Compresión (pandeo)

4) Vigas: tienen cierto volumen que les permite soportar todo tipo de esfuerzos.

Continua

- Membranas: textiles
- Láminas: elementos rígidos continuos
- Placas: losas

• Estructuras Reales e Ideales

Estudio de modelo simplificado.

$\boxed{2D}$ 3 grados de libertad ⟶ 2 desplazamiento (x, y), 1 giro (en el plano x, y)

↓

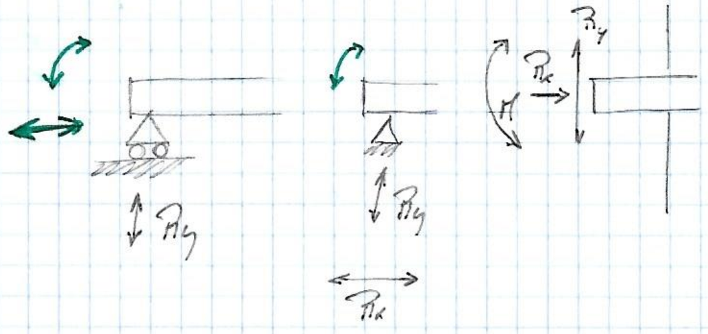
Posibles movimientos

$\boxed{3D}$ 3 desplazamientos (x, y, z)

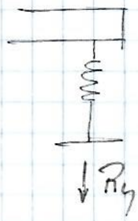
3 giros
- En el plano xy (eje z)
- En el plano yz (eje x)
- En el plano xz (eje y)

1er Análisis: Exterior → Reacciones (Oponen a los grados de libertad)

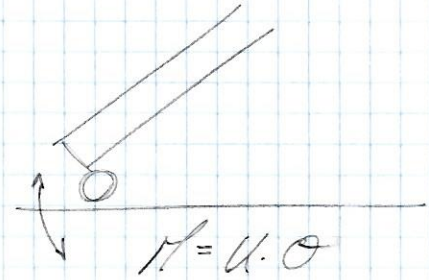
Estudiamos la estructura como un sólido.



* Apoyo Elástico (muelle)



$R = K \cdot \delta$



$M = K \cdot \theta$

Conceptos Básicos

A) Equilibrio

Medios Continuos: eq interno: $\text{div}\,\underline{\sigma} + \rho \cdot \bar{b} = \rho\,\bar{a}$

$\bar{t}_n = \underline{\sigma} \cdot \bar{n}$ Habitual $\bar{a} = 0$

* Sistemas discretos: eq externo $\Sigma F = 0$

$\Sigma M = 0 \rightarrow \Sigma M = \Sigma M_{ext} + \Sigma \bar{F} \wedge d$

Producto vectorial

B) Compatibilidad

- Sistemas Isostáticos = mismo nº de fuerzas que de incógnitas (resuelven)
- Sistemas Hiperestáticos = sobra información (condiciones)
- Mecanismos = no se consideran estructuras porque faltan fuerzas.

Medios Continuos: relación entre $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$ y $\bar{u}$

* Sistemas discretos $F = N$

$\sigma = \frac{N}{}$ $\Delta L = \frac{N}{E \cdot A} \cdot L$

Hipótesis Básica

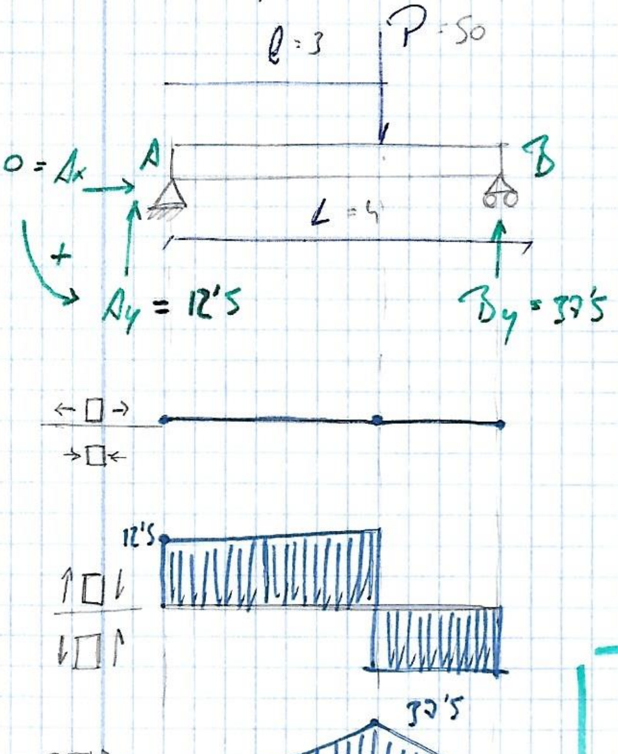
- Pequeños deformaciones
- Material de forma lineal.
- Principio de superposición → cosos despreciables.

DIAGRAMAS

Representación gráfica de esfuerzos

1º Equilibrio externo → Reacciones

1: Equilibrio Interno en puntos significativos



Equilibrio general

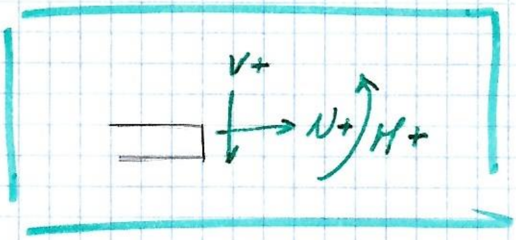
$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - P = 0$

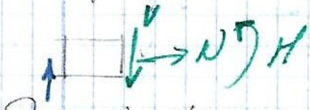
$A_y + B_y = P \rightarrow A_y = 50 - 37'5 =$ $\boxed{A_y = 12'5}$

$\Sigma M_A = 0 \quad -P(l) + B_y \cdot (L) = 0$

$B_y = \frac{50 \cdot 3}{4} = \boxed{37'5}$



$\boxed{\text{Equilibrio interno}}$



$\frac{P}{L}(L-l) = 12'5$

$* \; N = 0$

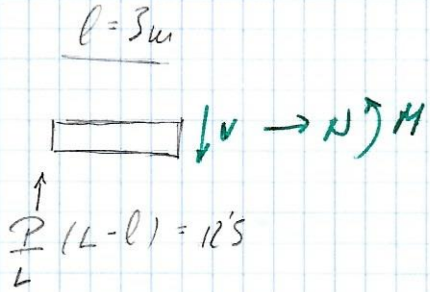
$* \; \frac{P}{L}(L-l) - V = 0 \qquad 12'5 - V = 0$

$V = 12'5 \; (\uparrow\square\downarrow)$

$V = \frac{P}{L}(L-l)$

$-12'5 \cdot 0 + M = 0$

$M = -\frac{P}{L}(L-l) \cdot 0 + M = 0 \qquad M = 0$

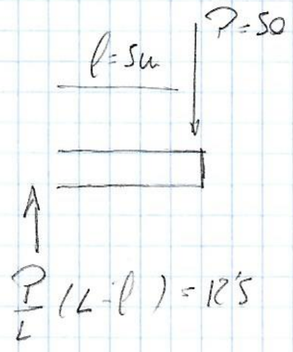


x) $N = 0$

y) $\frac{P}{L}(L - l) - V = 0$

M) $-\frac{P}{L}(L - l) \cdot l + M = 0$

$M = +37'5$



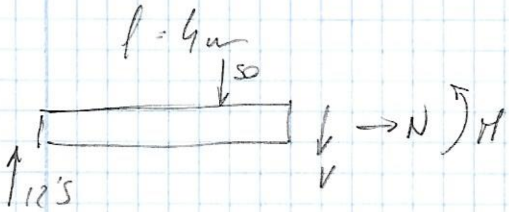
x) $N = 0$

y) $\frac{P}{L}(L - l) - P - V = 0$

$12'5 - 50 - V = 0$

$V = -37'5$

M) $M = +37'5$



x) $N = 0$

y) $12'5 - 50 - V = 0$

$V = -37'5$

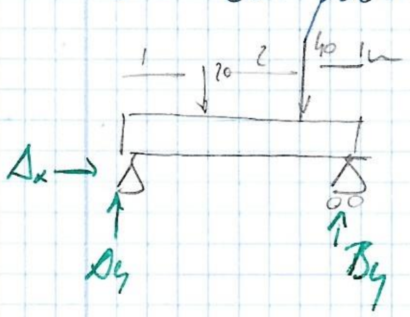
M)

$-12'5 \cdot 4 + 50 \cdot 1 + M = 0$

$M =$

V = Son rectas constantes cuando se aplica en fuerzas concreta.

V = Con fuerzas repartidas se curva.



x) $A_x = 0$

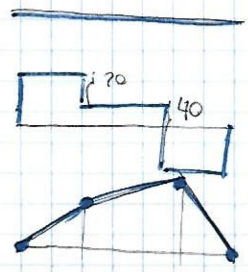
y) $A_y + B_y - 20 - 40$

$A_y + B_y = 60$

M) $-20 \cdot 1 - 40 \cdot 3 + B_y \cdot 4 = 0$

$B_y = \frac{20 + 120}{4} = 35$

$A_y = 60 - B_y = 25$



17/2/17 Dimensionamiento

02. Teoremas energéticos

Fuerzas → desplazamientos ⇝ $W_e = F \cdot d$

↓ Estructuras

Esfuerzos internos → Deformaciones → U

$W_e = U_i$ ← energía interna, elástica o de deformación

① Principio de conservación de la energía : $W_e = U_i = \frac{1}{2} P \, \delta$ ← desplazamiento que produce en su punto de aplicación y en su dirección.

P ← Peso ó fuerza.

momentos

$W_e = U_i = \frac{1}{2} M \cdot \theta$

M ← Momento

θ ← giro que produce el momento

② Esfuerzos y desplazamientos (Rebanadas ds)

• Axil :

U_i = energía
U_x = desplazamiento

• Para el trozo

$dU_i = \frac{1}{2} N \cdot dU_x = \boxed{\frac{1}{2} \frac{N^2}{E \cdot A} \cdot dx}$

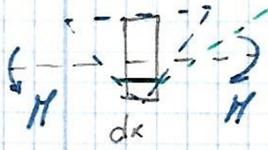
$\Delta L = \frac{N}{E \cdot A} \cdot L$

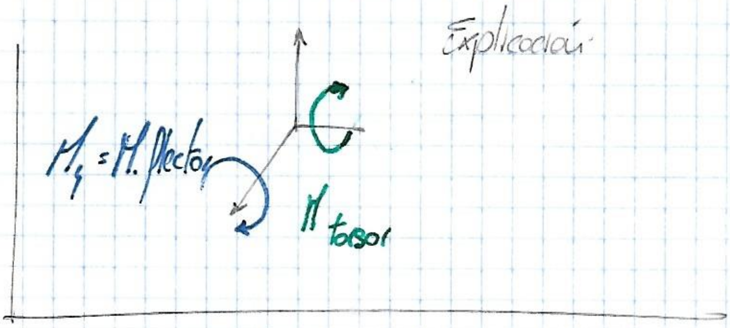
N = Esfuerzo axil
E = Módulo de Young (mate
A = área de la sección

• Para toda la barra.

$$U_{iN} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{N^2}{E \cdot A} \, dx = \frac{1}{2} \frac{N^2}{EA} \cdot L$$

- Momento Flector

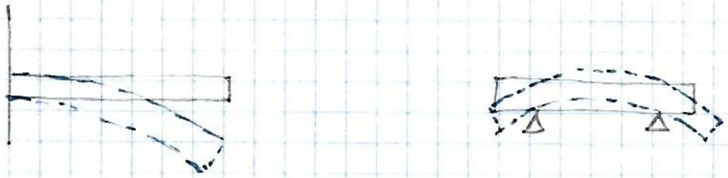




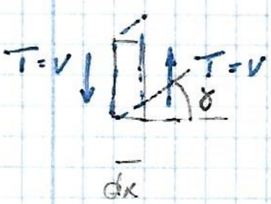
$$\boxed{dU_{iF} = \frac{1}{2} M \cdot d\theta = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E \cdot I} dx}$$

$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} dx$$

$$U_{iF} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M^2}{E \cdot I} dx = \frac{1}{2} \frac{M^2}{E \cdot I} \cdot L$$



CORTANTE



$\sigma = E \cdot \varepsilon$ (Cuando es perpendicular)

Tensión tangencial

$$* \; du_y = \gamma \cdot dx = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{G \cdot A_c} dx$$

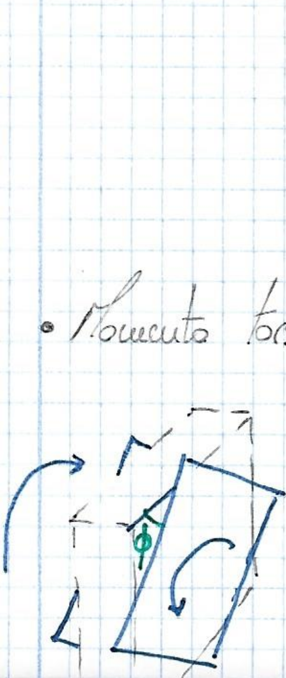
A_c ← Radio de giro; $\frac{A}{\alpha}$

G: modulo de elasticidad transversal

$$dU_{iC} = \frac{1}{2} T \, du_y = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G \cdot A_c} \cdot dx$$

$$U_{iC} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{T^2}{G \cdot A_c} dx = \frac{1}{2} \frac{T^2}{G A_c} \cdot L$$

- Momento torsor



$$dU_{iT} = \frac{1}{2} \cdot M_T \cdot d\phi \qquad d\phi = \frac{M_T}{G \cdot I} dx$$

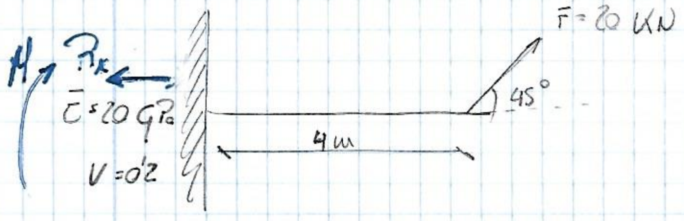
$$= \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GI} \cdot dx$$

$$U_{iT} = \int_0^L \frac{1}{2} \frac{M_T^2}{GI} dx = \frac{1}{2} \frac{M_T}{GI}$$

Pieza de longitud AT sometida a todos los esfuerzos

$$U_i = U_{iN} + U_{iF} + U_{iC} + U_{iT} = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\frac{N^2}{E\cdot A} + \frac{M_F^2}{E\cdot I} + \frac{T^2}{G\cdot A_c} + \frac{M_T^2}{G\cdot I}\right) dx$$

Ejercicio 1



1° Equilibrio general para conocer Reacciones

(x) $R_x + F_x = 0$

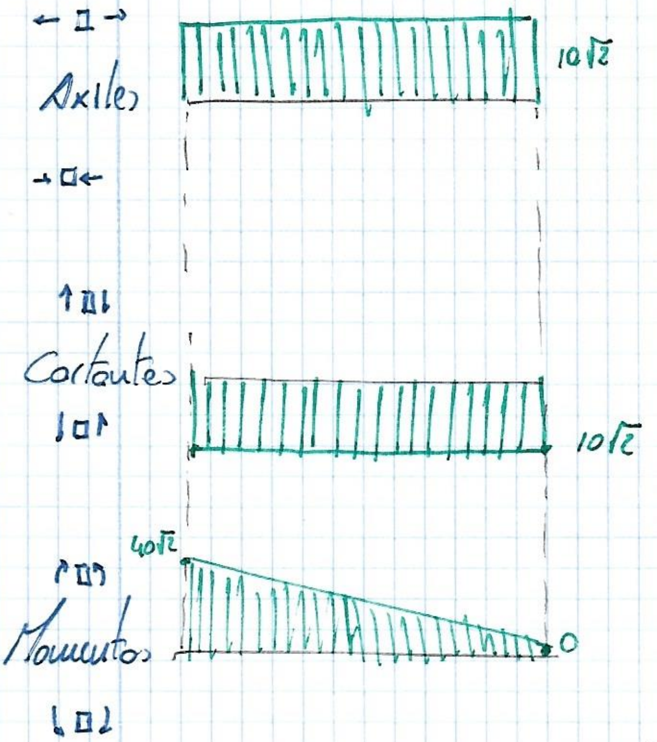
$R_x = 20 \cdot \cos 45 = -10\sqrt{2}$ kN

(y) $R_y + F_y = 0$

$R_y = -20 \cdot \operatorname{sen} 45 = -10\sqrt{2}$ kN

(M_A) $M + F_y \cdot 4 = 0$

$M_A = -10\sqrt{2} \cdot 4 = -40\sqrt{2}$ kN·m



$M_B - 40\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \cdot 4 = 0$

$M_B = 0$

$\boxed{u_x}$ $W_e = U_i$

$F_x \cdot u_x = U_{iN}$

$10\sqrt{2} \cdot u_x = \frac{1}{2}\int_A^B \frac{N^2}{E\cdot A}\, dx = \frac{1}{2}\frac{N^2}{E\cdot A} \cdot L$

$u_x = \frac{1}{2}\,\frac{10\sqrt{2}}{E\cdot A} \cdot 4$

$v = \boxed{u_y}$ $F_y \cdot v_y = U_{iC} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{T^2}{G A_c} \cdot L$ $\quad R_y^2 \; (-10\sqrt{2})^2$

θ $\quad M \cdot \theta = U_{iM}$

Tª Trabajos Virtuales

Equilibrio: trabajo total de las fuerzas que actúan sobre él es 0

Varias fuerzas

Partículas, sólidos, agrupaciones de sólidos

F_δ ó F^δ

Tª Castigliano

Coeficiente de influencia = $f \dfrac{\text{externas}}{\text{deformaciones}}$

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i \rightarrow \text{desplazamiento en la dirección de } F$$

$$* \quad d_i = \int_A^B \left(\frac{N}{E \cdot A} \cdot \frac{\partial N}{\partial F_i} + \dots \right)$$

Tª Navier

Cuando sabemos lo que pasa en un pto concreto pero queremos saber lo que pasa en otro

Se desprecia lo que se debe a axiles y cortantes

Ⓐ conocido: u_{xA}, u_{yA}, θ_A

Calcular B $\rightarrow u_{xB} = u_{xA}$

$$u_{yB} = u_{yA} + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x_A) \, dx$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx$$

Mohr (prácticamente) diferencia entre dos puntos

Dimensionamiento.

23/2/17

Estructuras trianguladas → Permiten una luz mayor, al tener canto mayor pero aprovechando el material

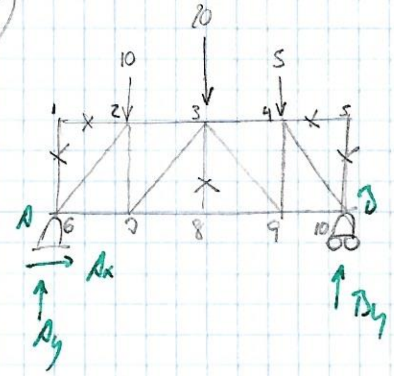
Barras rígidas → Soportan tracción y compresión en la dirección de la barra (axiles)

→ Esfuerzos en la barra.

① Nudos. Aislar cada nudo con las fuerzas que se aplican en él y las barras que concurren.

- Máximo dos barras desconocidas

Ejem



(X) $A_x = 0$

(Y) $A_y + B_y - 35 = 0$

$A_y + B_y = 35$ $\qquad \boxed{A_y = 18'75}$

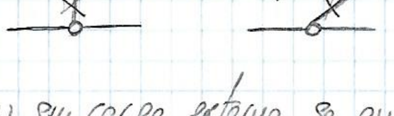
(M_A) $-10 \cdot 1 - 20 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + B_y \cdot 4 = 0$

$\boxed{B_y = 16'25}$

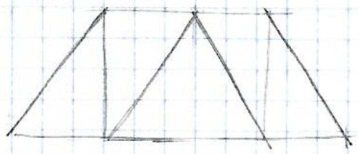
---

* Anulación de barras

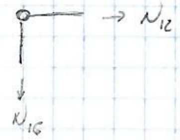
* Tres barras con dos alineadas sin carga externas se anula la dirección distinta



* Dos barras perpendiculares sin carga externa se anulan las dos



Nudo 1

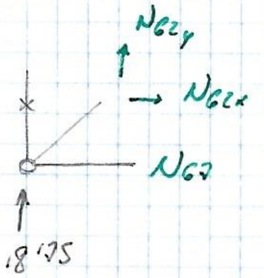


(x) $N_{12} = 0$

(y) $N_{16} = 0$

$N_{12} = 0$
$N_{16} = 0$
$N_{62} = -26'5 \, (C)$
$N_{67} = 18'5 \, (T)$
$N_{23} = -18'75$
$N_{73} = -12'4$
$N_{78} = 27'5 \, (T)$

Nudo 6



(x) $N_{62x} + N_{67} = 0 \rightarrow N_{67} = 18'75$

(y) $18'75 + N_{62y} = 0$

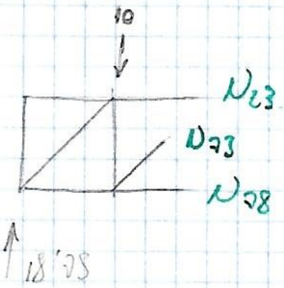
$N_{62y} = -18'75 \rightarrow N_{62} = -26'5$

$N_{62x} = -18'75$

Cortes y Secciones

Hacemos equilibrio interno de una parte.

- Máx de tres barras desconocidas



(x) $N_{23} + N_{73x} + N_{78} \rightarrow -18'75 - 8'75 + N_{78} = 27'5$

(y) $18'75 - 10 + N_{73y} = 0$

$N_{73y} = -8'75 \rightarrow N_{73} = -12'4$

$N_{73x} = -8'75$

M_7 $\quad -18'75 \cdot 1m - N_{23} \cdot 1 = 0$

$N_{23} = -18'75$

Ejercicio 7

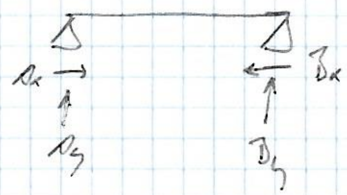
Tipo de estructuras

- Mecanismo → Estructura hipoestáticas (No son estructuras)

gdL: grados de libertad (Reacciones)

2 reacciones < 3 ecuaciones

• Hiperestáticas → gdl > ecuaciones

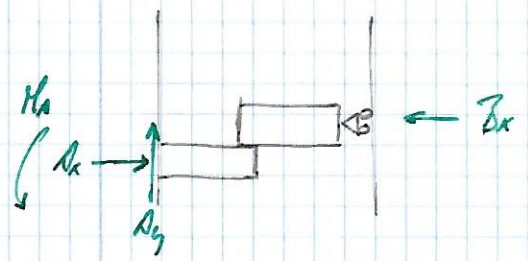


4 reacciones > 3 ecuaciones

* Criterios

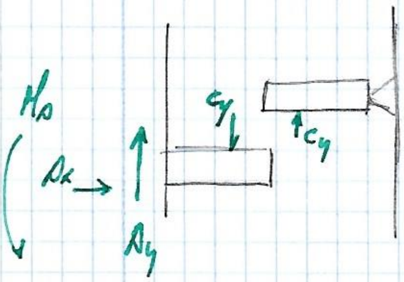
Al dividir aparecen nuevas incógnitas, que deben ser iguales a un lado y en otro.

• Pórticos apoyados



4 reacciones > 3 ecuaciones

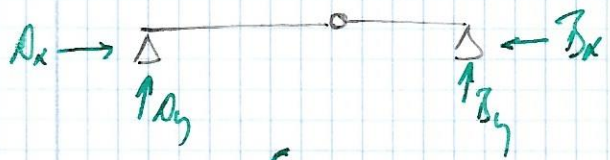
Hiperestático.



6 ecuaciones < 6 ecuaciones

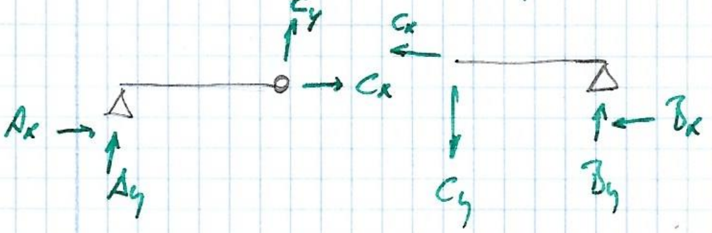
Isostático.

• Articulaciones

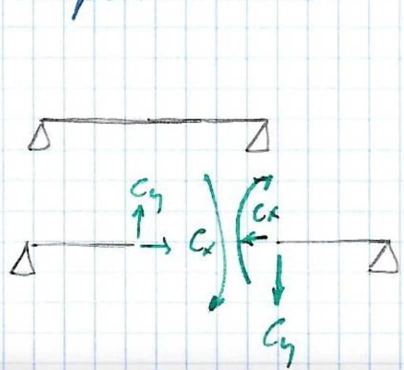


4 relaciones > 3 ecuaciones

Hiperestático.



• Empotramiento.



Dimensionamiento

24/01/17

1 Energía interna → debido a esfuerzos internos

No lo solemos estudiar

$$U_i = \frac{1}{2}\int_A^B \left(\underbrace{\frac{N^2}{E\cdot A}}_{} + \underbrace{\frac{T^2}{G\cdot A_c}}_{} + \frac{M_f^2}{E\cdot I_z} + \frac{M_t^2}{G I_o}\right)\cdot dx$$

N = Axil

E = Mod. young

A = área de la sección

T = constante

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$A_c = \frac{A}{\beta}$ (área; radio de giro)

Esfuerzos Internos

M_f = momento flector

E = M. young

* I_z = Momento de inercia (Sección)

* Tablas.

M_t = momento torsor

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

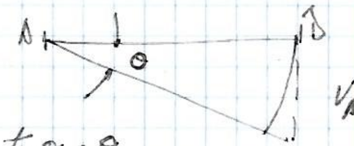
I_o = Momento inercia

→ Se usa en estructuras muy sencillas que se consideran en su magnitud total

(u) movimiento horizontal (N)

(v) movimiento verticales (T)

(θ) giro (Momento flector)
↓
produce también desplazamiento.



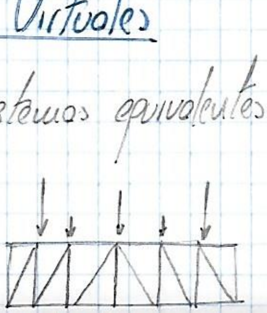
$tg\,\theta = \theta$

$tg\,\theta = \frac{V_M}{L}$ $\quad V_M = \theta\cdot L$

2. Trabajos Virtuales

Plantear sistemas equivalentes mas sencillos

$W_e = U_i$



Es lo que tendríamos que calcular

Estado 1 $\begin{cases} \text{Reacciones} \\ N^S \end{cases}$

Desplazamiento total.

$$\underbrace{1 \cdot V}_{W_e} = \text{relación } N \text{ y } N^S$$

3 Castigliano

Relación entre desplazamientos generales y desplazamientos en la dirección de la fuerza.

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i \rightarrow$$

U = desplazamiento general
F = Fuerza
d = desplazamiento en la dirección de la fuerza.

$$\partial U = \partial F_i \cdot d_i$$

4 Navier

Relación entre puntos (U, V, θ)

$$U_B = U_A + \int_A^B du = U_A + \int_A^B \frac{N}{EA}\,dx \Rightarrow U_B = U_A$$

$$V_B = V_A + \theta\,\underbrace{(x_B - x_A)}_{\text{distancia } AB} - \int_A^B dv + \int_A^B d\theta\,(x_B - x_A)$$

$$V_B = V_A + \theta_A\,(x_B - x_A) - \int_A^B \frac{T}{G A_c}\,dx + \int_A^B \frac{M}{EI}\,(x_B - x_A)$$

$$\underline{V_B = V_A + \theta_A\,(x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{E \cdot I}\,(x_B - x_A)\,dx}$$

Se consideran despreciables

$$0 = \theta_A\,(x_B - x_A) + \int_A^B d\theta\,(x_B - x_A)$$

Si no se tiene información suficiente

$$0 = \theta_A\,(x_B - x_A) + \int_A^B d\theta\,(x_B - x_A)$$

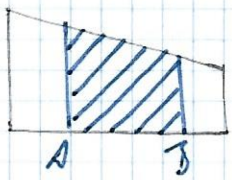
$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B d\theta = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI}$$

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI} dx$$

⑤ Mohr

Similar a Navier pero con solución gráfica.

$$\theta_b - \theta_A = \int_A^b \frac{M}{E \cdot I} dx = \frac{M_{AB}}{EI}$$ → Área de diagrama de momentos medido entre A y B



$$t_{A/B} = \int_A^B \frac{M}{EI} (x_B - x_A) \cdot dx = \frac{M_{AB}}{EI} \cdot d \text{ (centro de gravedad, B)} \rightarrow$$

→ Momento estático del área de flectores respecto al eje que pasa por B

$$A_T x_T = x_{triang} \cdot A_{triangulo} + A_{rectangulo} \cdot x_{rect}$$

⑥ Cargas térmicas

Producen desplazamiento pero no tensiones (Solo que no dejemos crecer a la pieza)

$\Delta l = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$ → longitud inicial

↑ incremento de temperatura

↑ Coeficiente térmico del material.

Se suma al desplazamiento de las otras fuerzas

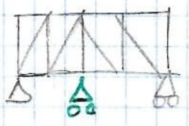
Tema 4 **Barras**

Isostática: $b = 2n - c$ → b = nº barras
n = nudos
c = reacciones desconocidas

| Ep General → reacciones

Hiperestática:
- Apoyos: calculamos desplazamiento en el apoyo lo igualamos a 0
- Barras: sustituimos la barra que sobra por su N

Ejem



$c = 3$
$b = 17$
$n = 10$

$17 = 2 \cdot 10 - 3$ → Isostática.
$17 = 2 \cdot 10 - 4$

La barra la sustituimos por una fuerza y la igualamos al acortamiento entre barras.

Esfuerzos internos (a partir de reacciones) → N_{barra}.
- Nudos → max dos incógnitas
- Cortes → max tres incógnitas

Desplazamientos.

① Trabajos virtuales (solo hay axil)

$$\Sigma F_i^{\delta} \cdot \delta_i + \Sigma R_i \cdot \Delta_i = \Sigma \int_0^L \left[N^0 N^I \frac{ds}{EA} \right]$$

$$\Sigma F_i^{\delta} \cdot \delta_i + \Sigma R_I \cdot \Delta_i = \boxed{\Sigma N^0 \cdot N^I \frac{L_i}{E \cdot A_i}}$$

N^0 = Esfuerzos en el estado inicial

(B) Castigliano

$$\frac{\partial U}{\partial F_i} = d_i$$

error de ejecución — variaciones por temperatura

$$U = \sum \frac{1}{2}\frac{N_i^2 \cdot L_i}{E \cdot A_i} + \sum N_i \cdot \partial^{e} + \sum N_i \cdot \partial^{\Delta T}$$

$$\partial^{\Delta T} = \alpha \cdot L_i \cdot \Delta T = \Delta($$

EJERCICIOS

Ej 2 Viga articulada, sección rectangular $0'8 \times 0'3$

Cara superior 20 °C

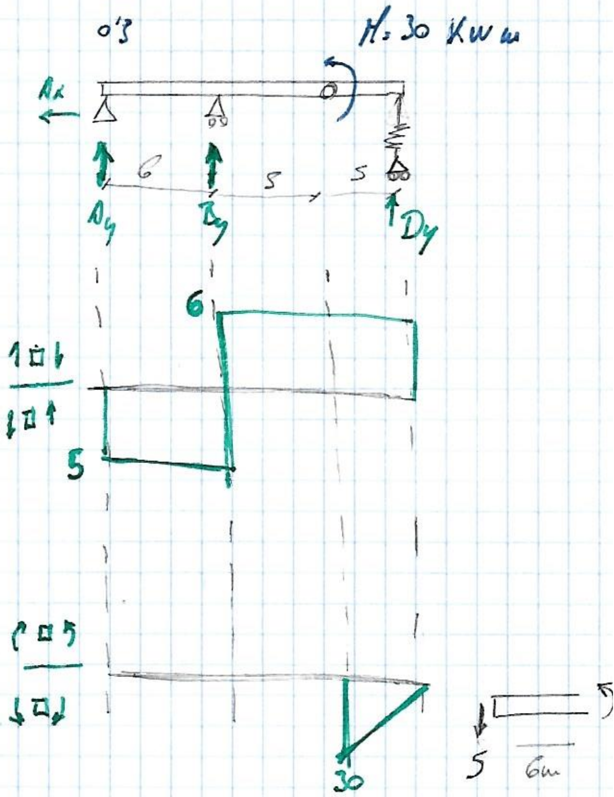
Cara inferior -20 °C

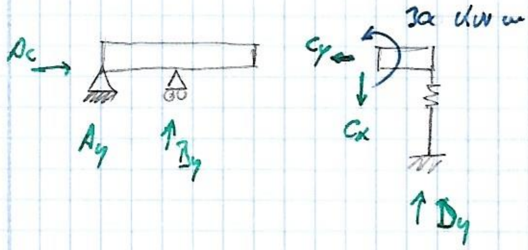
$$\boxed{\begin{aligned} E &= 200\ GPa \\ \alpha &= 10^{-5}\ C^{-1} \\ K &= 500\ kN/m \end{aligned}}$$

a) esfuerzos

b) giros en A y B

c) movimiento vertical C





(x) $A_x = 0$	(x) $C_x = 0$
(y) $A_y + B_y - 6 = 0$	(y) $C_y + D_y = 0$
$A_y + B_y = 6$	$C_y = D_y \rightarrow \boxed{C_y = -6\,kN}$
M_A: $B_y \cdot 6 - 6 \cdot 11 = 0$	$M_C = 30 + D_y \cdot 5 = 0$
$\boxed{B_y = 11\,kN}$	$\boxed{D_y = -6\,KN}$

$5 \cdot 6 + M = 0$

$M = -30\ kN \cdot m$

b) Giros A y B

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx$$

Porque desplazamiento vertical es cero.

$$v_B = v_A + \theta_A (x_B - x_A) + \int_A^B \frac{M}{EI}(x_B - x)\,dx$$

$$I_{rectangular} = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12}\, 0'3 \cdot 0'0129$$

$$0 = \theta_A \cdot 6 + \frac{-30 \quad -0}{200 \cdot 10^9 \cdot 0'128} \cdot 6$$

$$\theta_A = 1'2 \cdot 10^{-8} \text{ radianes}$$

apartado c

Energía Interna

$$U_i = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{N^2}{E\cdot A} + \frac{T^2}{G A_c} + \frac{M^2}{EI} + \frac{M_t^2}{G I_0}$$

Simplificación de la formula.

(u) $\boxed{du = \frac{N}{E\cdot A}\cdot dx}$

$$u = \int_0^3 \frac{N}{E\cdot A}\cdot dx \rightarrow u = \frac{N}{E\cdot A}\cdot L$$

	0	30°	45°	60°	90°
Sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$

(v) $\boxed{dv = \frac{T}{G\cdot A_c}\cdot dx}$

$$v = \int_0^3 \frac{T}{G\cdot A_c} dx$$

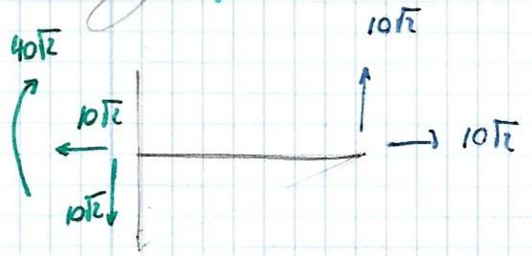
GPa $\rightarrow 10^9 \rightarrow N$

$\rightarrow 10^6 \rightarrow kN$

(θ) $\boxed{d\theta = \frac{M}{E\cdot I}\cdot dx}$

$$\theta = \int_0^3 \frac{M}{E\cdot I}\cdot dx$$

$\boxed{Ej!}$



(u) $du = \frac{N}{A\cdot E} dx \rightarrow u = \frac{10\sqrt{2}}{E\cdot A}\cdot L$

(v) $dv = \frac{T}{G\cdot A_c}$

$$v = \int_0^3 \frac{T}{G\cdot A_c}\cdot dx$$

(M) $\boxed{d\theta = \frac{M}{E\cdot I_z}\cdot dx}$

$$\theta = \int_0^3 \frac{M}{E\cdot I} dx$$

$*\ A_c = \frac{A}{R}$

rectangular $R = \frac{6}{5}$

Circular $R = \frac{10}{9}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$*\ I_z =$

□ h b $\frac{1}{12} b\cdot h^3$

□ l l $\frac{1}{12}\cdot l^4$

○ $\frac{\pi\cdot r^4}{4}$

(1°) M(x)

$$-F\cdot L\frac{\sqrt{2}}{2} + F\frac{\sqrt{2}}{2}x + M = 0$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2}(L-x) = 10\sqrt{2}(4-x)$$

2º Áreas → Mohr

A) $\int_A^B \frac{M}{EI}\,dx = \frac{\text{Área de momentos de la gráfica entre a y b}}{EI}$

$$\boxed{\theta = \frac{1}{EI}\cdot\frac{(L\cdot M_A)}{2}} \rightarrow \frac{1}{EI}\cdot\frac{4\cdot 40\sqrt{2}}{2}$$

aplicado a ejercicio 1

B) $\int_A^B \frac{M}{E\cdot I}(x_B - x)\cdot dx = \frac{1}{EI}\cdot$ (Área de la gráfica momentos entre a y b) · Centro de gravedad al punto

• Desplazamiento que produce el giro

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{V_m}{L}$$

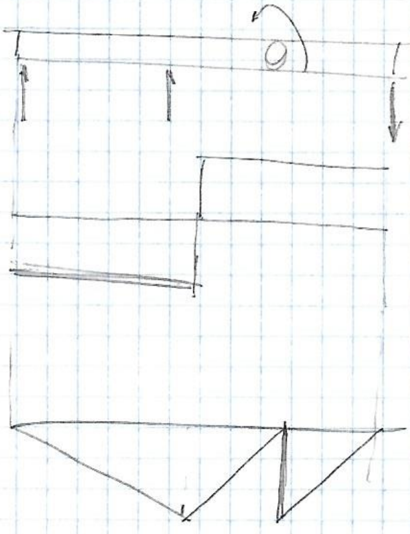
$$V_m = \theta\cdot L$$

$$dV_m = d\theta\,(x_B - x)\cdot dx$$

$$V_m = \int_A^B \frac{M}{E\cdot I}(x_B - x)\,dx$$

$$V_m = \underbrace{\frac{1}{E\cdot I}\cdot\underbrace{\frac{40\sqrt{2}}{2}}_{\text{área}}}_{\text{giro}}\cdot\underbrace{\frac{2}{3}\cdot 4}_{\text{distancia}}$$

Ej 2



b) Giros en A y B

$$\theta_B = \theta_A + \int_A^B d\theta = \theta_A + \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx =$$

↳ $\theta_A + \frac{1}{E\cdot I} M$

$$V_B = V_A + \theta_A(x_B - x_A) + \int_A^B d\theta\,(x_B - x)$$

$$V_B = V_A + \theta_A\cdot\text{distancia } AB + \int_A^B \frac{M}{EI}(x_B - x)\cdot dx$$

↳ $V_A + \theta_A\cdot \text{dist} + \frac{1}{EI}\, M_{AB}\cdot d$

$$0 = 0 + \theta_A\cdot 6 + \frac{1}{EI}\cdot\frac{6\cdot 30}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 6$$

En ambos casos hay un incremento de temperatura

a los giros en Mohr $\rightarrow$ $-\int_A^B \frac{\alpha \Delta T}{c} \cdot dx \rightarrow \boxed{\frac{-\alpha \Delta T}{c}(x_B - x_A)}$

desplazamiento $\rightarrow$ $-\int_A^B \frac{\alpha \cdot \Delta T}{c}(x_B - x) \cdot dx$

$$\boxed{-\frac{\alpha \cdot \Delta T}{c} \cdot \frac{(x_B \cdot x_A)^2}{2}}$$

$\theta_A = 1'5 \cdot 10^{-3}$ rad

$\theta_B = -1'6 \cdot 10^{-3}$ rad

C) Movimiento vertical en C

$$\theta_C = \theta_A + \int_A^C d\theta - \int_A^C \frac{\alpha \Delta T}{c} dx$$

$$V_C = \cancel{V_A}_0 + \theta_A \cdot \text{dist } AC + \int_A^C d\theta (x_C - x) - \int_A^C \frac{\alpha \cdot \Delta T}{c}(x_C - x) dx$$

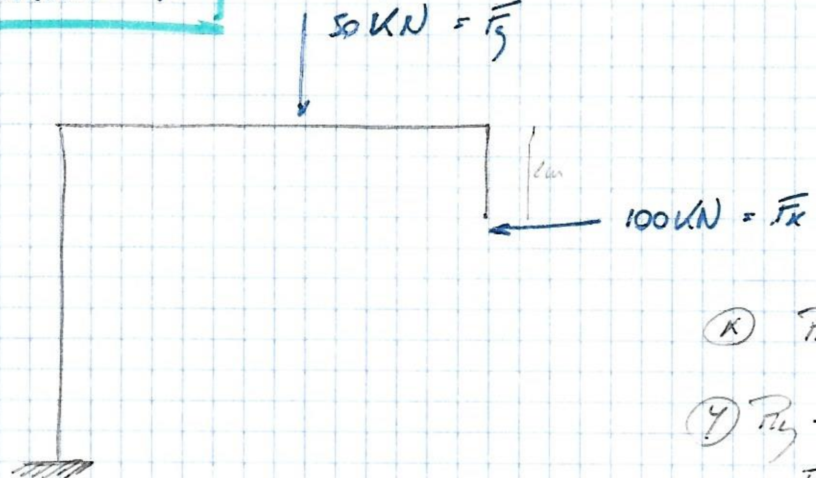
desplazamiento vertical se hace por giro no por cortantes

$$V_C = 1'5 \cdot 10^{-3} \cdot 11 + \frac{1}{EI} \frac{11 \cdot 30}{2} \cdot 5,33 - \frac{10^{-5} \cdot 40}{0'8} \cdot \frac{11^2}{2}$$

centro de gravedad {

$A_{Tot} \cdot \text{dist}_{cent} = A_1 \cdot \text{dist}_{cent} + A_2 \text{ dist}$

Ejercicio 4



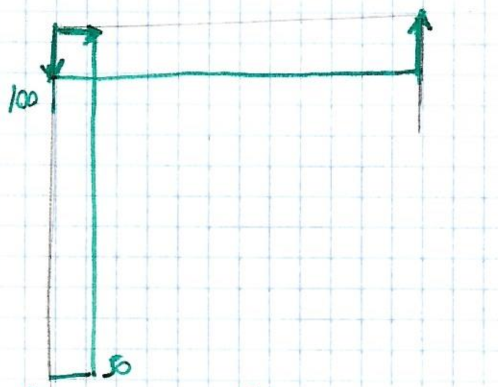
(x) $R_x - F_x = 0 \rightarrow R_x = F_x = 100\,kN$

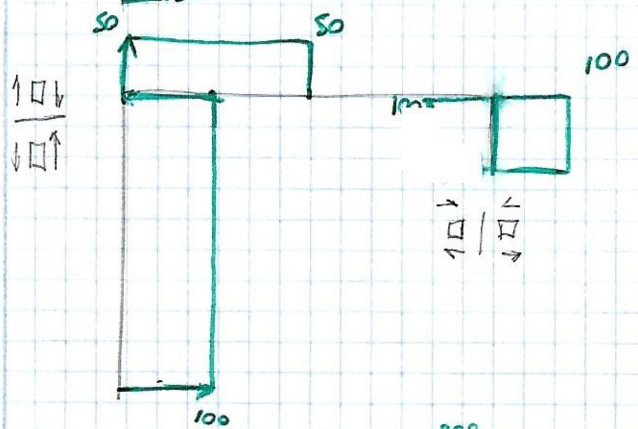
(y) $R_y - F_y = 0$

$R_y = -F_y = -50\,kN$

(M_1) $M - F_y \cdot 4 + F_x \cdot 2 = 0$

$M = 2F_x + 4F_y = 0$





(M_2) $M_2 + F_x \cdot 4 = 0$

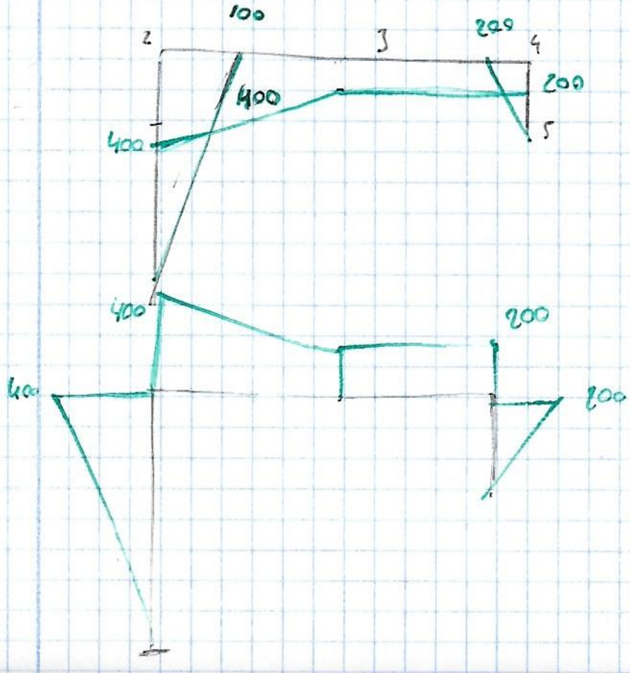
$M_2 = -400$

Para calcular u y v

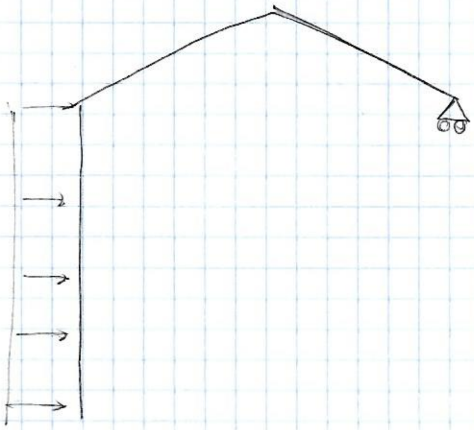
$du = \Sigma d\theta \cdot d$

$u = \Sigma \int \frac{M}{EI} (x_g - x) \cdot dx$

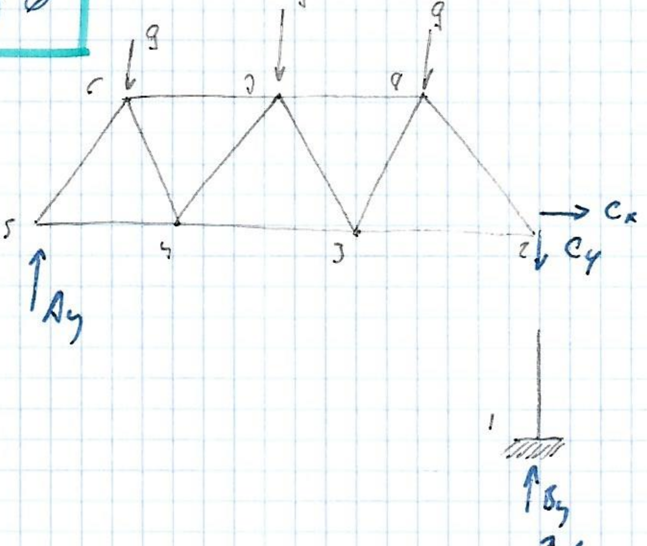
Continua



Ej 5



Ej 6



(x) $C_x = 0$

(y) $A_y + B_y - qL = 0$

$A_y + B_y = q \cdot L = 25 \cdot 4 = 100\,kN$

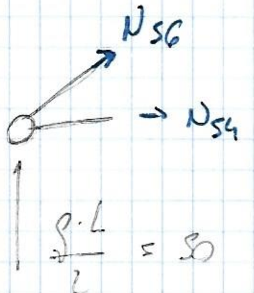
(M_C) $-A_y \cdot 6 + q \cdot 5 + 2q \cdot 3 + q \cdot 1 = 0$

$A_y = \frac{12q}{6} = 2q = 50\,kN$

$B_y = q \cdot L - A_y = 2q = 50\,kN$

Esfuerzos internos

Nudo 5



(x) $N_{54} + N_{56x} = 0 \rightarrow N_{45} = +\frac{q \cdot L}{2\sqrt{3}}$

(y) $\frac{q \cdot L}{2} + N_{56y} = 0$

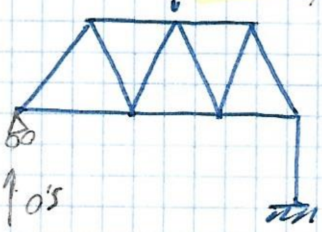
$N_{56} = -\frac{q \cdot L}{\sqrt{3}}$

Trabajos virtuales

Estado 0 → N^0

Estado 1 → carga de 1kN en un punto y en dirección en la que voy a calcular los desplazamientos. → N^1

1kN → fuerza virtual



↑0'5

↑0'5

↓ Ec. General → reacciones virtuales

↓ Esfuerzos internos → N^I

$$\boxed{F^S \cdot d = \sum \frac{N^0 N^I}{E \cdot A}}$$

$$d = \frac{L}{EA} \sum N^0 N^I$$

Funciona igual con momentos

$$M^S \cdot \theta = \frac{L}{E \cdot A} \sum N^0 N^I$$

Longitud de la barra.

Si tiene temperatura → $+ \sum_{\substack{\text{barras} \\ \Delta T}} \alpha \Delta T L_i$

Compresión resta

tracción suma